Coefficienti di Fourier per una funzione con punti angolosi e salti.

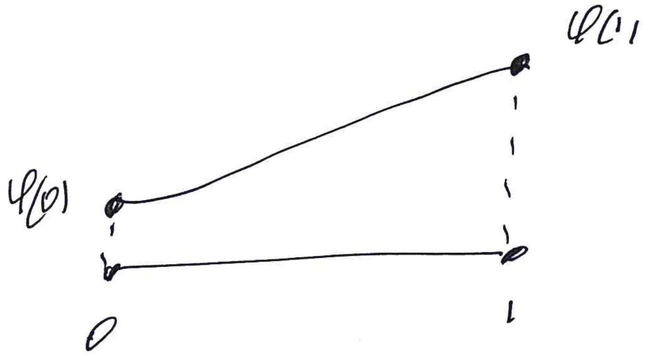
Sia $\varphi : [0,1[\to \mathbb{C}$ una funzione derivabile, tranne che per dei salti o dei punti angolosi.

Supponiamo che i salti siano in

$$0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1 .$$

Nota: la funzione ha un salto in $t=0$

se $\varphi(0) \neq \lim_{t \to 1} \varphi(t)$



Allora, per $n \neq 0$,

$$\boxed{\widehat{\varphi'}(n) = 2\pi i n \cdot \hat{\varphi}(n)}$$

dim. Considero solo il caso di un singolo punto di discontinuità alla frontiera:

~~Allora~~ $\varphi(1) \neq \varphi(0)$. Allora

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \varphi_c'(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ [\varphi(0) - \varphi(1)] \cdot \delta_0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

dove φ_c' non tiene conto di δ_0

Calcolo: $\hat{\varphi}(n) = \int_0^1 \varphi(t) e^{-2\pi i n t} \, dt =$

$$= \left[\frac{\varphi(t) e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n t} \right]_0^1 - \int_0^1 \varphi_c'(t) \frac{e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n} \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i n} \cdot \left\{ [\varphi(0) - \varphi(1)] + \int_0^1 \varphi_c'(t) e^{-2\pi i n t} \, dt \right\}$$

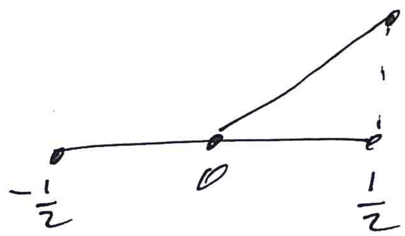
$$= \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 \left\{ [\varphi(0) - \varphi(1)] \delta_0(t) + \varphi_c'(t) \right\} e^{-2\pi i n t} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i n} \widehat{\varphi'}(n) \quad \blacksquare$$

ESERCIZIO

Calcolare i coefficienti di Fourier di

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\frac{1}{2} \le t \le 0 \\ t & \text{se } 0 \le t < 1/2 \end{cases}$$



$$\hat{\varphi}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(t)\, e^{-2\pi i n t}\, dt$$

$$\hat{\varphi}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{8}$$

Se $n \neq 0$, posso utilizzare diversi procedimenti.

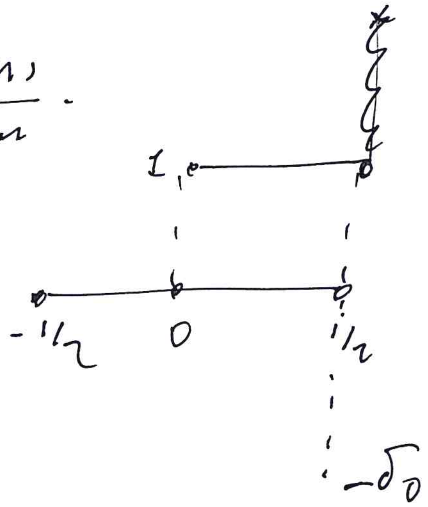
(1) Diretto. $\hat{\varphi}(n) = \int_0^{1/2} t\, e^{-2\pi i n t}\, dt =$

$$= \left[t \cdot \frac{e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n} \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n}\, dt \quad \text{(integrazione per parti)}$$

$$= -\frac{e^{-\pi i n}}{4\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n} \left[\frac{e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n} \right]_0^{1/2} = -\frac{e^{-\pi i n}}{4\pi i n} + \frac{e^{-\pi i n} - 1}{4\pi^2 n^2}$$

$$= -\frac{(-1)^n}{4\pi i n} + \frac{(-1)^n - 1}{4\pi^2 n^2} \quad \text{poiché } e^{-\pi i} = \cos(\pi) - i \sin(\pi) = -1$$

(2) Uso la formula $\hat{\varphi}(n) = \dfrac{\widehat{\varphi'}(n)}{2\pi i n}$.



Qui $\varphi'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le t \le 1/2 \\ -\delta_0 & \text{in } t = 1/2 \end{cases}$

Quindi $\widehat{\varphi'}(n) = -\hat{\delta}_{1/2}(n) + \hat{\Psi}(n)$

$= -(-1)^n + \hat{\Psi}(n)$

Uso: $\hat{\delta}_{1/2}(n) = e^{-2\pi i n 1/2}$
$= e^{-\pi i n} = (-1)^n$

dove $\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le t \le 1/2 \\ 0 & \text{se } -1/2 \le t \le 0. \end{cases}$

Da cui $\Psi'(t) = \delta_0 - \delta_{1/2}$

Quindi:

$$\hat{\varphi}(n) = -\frac{(-1)^n}{2\pi i n} + \frac{1}{(2\pi i n)^2} \cdot \left[\hat{\delta}_0(n) - \hat{\delta}_{1/2}(n) \right] = -\frac{(-1)^n}{2\pi i n} - \frac{1}{4\pi^2 n^2} \left(1 - (-1)^n\right)$$